**Математика для эрудитов**



**Чубукова Екатерина**, *ученица 9-го класса*,

**Пахнутова Нина Васильевна**, *учитель математики,*

*руководитель по подготовке учащихся*

*МОУ «Средняя общеобразовательная школа №27», г.о. Саранск, Республика Мордовия*

С древних времен известно, что математика учит нас правильно и последовательно мыслить, логически рассуждать. Тот, кто занимается математикой, воспитывает волю, настойчивость. Еще Наполеон говорил: «Уровень развития страны зависит от уровня развития математики».

Наиболее эффективным средством выявления интересов и развития интеллектуальных возможностей учащихся являются предметные олимпиады. В последние годы проводится много различных математических олимпиад. Кроме традиционных олимпиад, проводятся также дистанционные, устные, заочные, нестандартные и другие виды олимпиад. Математические олимпиады не только дают ценные материалы для суждения о степени математической подготовленности учащихся и выявляют наиболее одаренных и подготовленных молодых людей в области математики, но и стимулируют углубленное изучение предмета.

Олимпиады готовят учащихся к жизни в современных условиях, в условиях конкуренции. Победы учащихся на олимпиадах международного и всероссийского уровней являются достаточным основанием для зачисления в вуз на льготных условиях.

Одним из примеров олимпиад является Всероссийский открытый заочный конкурс-олимпиада «ПОЗНАНИЕ И ТВОРЧЕСТВО». Олимпиада проходит под девизом «Краткость – сестра таланта». В Зимнем туре 2013/2014 учебного года мои ученики принимали участие в номинации «Математика эрудитов». Эта предметная олимпиада существенно отличается от других своей необычностью и интересным наполнением. Увлекательные,  творческие задания, позволяют раскрыть способности учащихся в учебе, а кроме того, дополнить портфолио дипломами и сертификатами!

***Решение заданий Зимнего тура 2013/2014 учебного года олимпиады «Познание и творчество»***

**Задание №1.**  Восстановить запись ААААААААА·А = 8ААААААААВ.

**Решение**. По смыслу задачи А – цифра, причём число А**.**А=А2 заканчивается цифрой В.



Представим умножение «столбиком»: ААА … А

А

8А …….. В

Следовательно, А**.**А=А2 > 70. Такому условию удовлетворяет только цифра 9:



92 = 81 ( В = 1).

Проверим единственное «предложение» для А:

999999999 **.** 9 = 8999999991.

Подходит!

**Ответ:** 999999999 **.** 9 = 8999999991.

**Задание №2.** Вычислить: + + + … + .



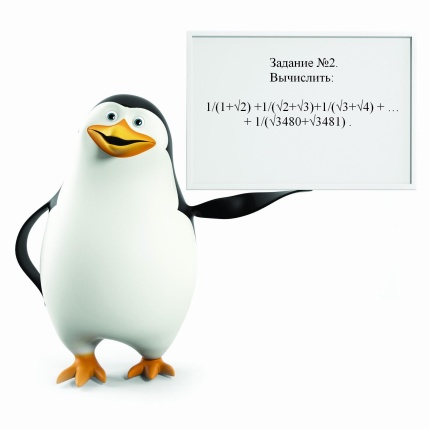
**Решение**. А = + + + … + .



Общий вид слагаемых в сумме: = .



Преобразуем их так: = = .



Тогда: А = () + () + () + … + () = =



= 59 – 1 = 58.



**Ответ:** 58.

**Задание №3.**  Решить уравнение 7х3 – 3х2 – 3х = 1.

**Решение**. Преобразуем уравнение: (7х3– 7) – 3 **.** (х2 + х – 2) = 0.



7 **.** (х – 1) **.** (х2 + х + 1) – 3 **.** (х – 1) **.** (х + 2) = 0,



(х – 1) **.** (7х2 + 7х + 7) + (– 3х – 6) = 0,

(х – 1) **.** (7х2 + 4х + 1) = 0,

х = 1 ⇔ х = 1, (т.к. D = 42 – 4**.**7 < 0).

7х2 + 4х + 1 = 0



**Ответ:** х= 1.

**Задание №4.** Решить уравнение 2х2 + 2у2 – 2ху + 1 – 2у = 1/3.



**Решение**. 2х2 + 2у2 – 2ху + 1 – 2у = 1/3

⇔ 2х2 – 2у **.** х + (2у2 – 2у + 2/3) = 0,



⇔ х2 – у **.** х + (у2 – у + 1/3) = 0,

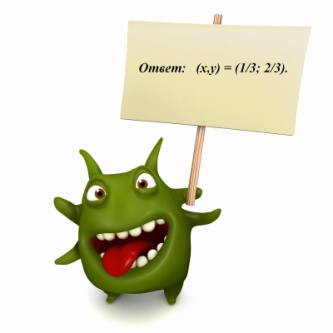
⇔ (х – у/2)2 + (3/4 **.** у2 – у + 1/3) = 0, т.е.

(х – у/2)2 + 3/4 **.** (у – 2/3) 2 = 0.

- единственное решение

данного уравнения

Значит: х – у/2 = 0 х = 1/3



у – 2/3 = 0 у = 2/3.

**Ответ:** (х,у) = (1/3; 2/3).

**Задание №5.** Представьте многочлен: х4 + х2 + 1 в виде произведения двух многочленов степени не ниже первой.



**Решение**. f(x) = x4 + x2 + 1.

Найдём действительные числа a, b, c, d такие, что

(x4 + x2 + 1) = (x2 + a **.** x + b) **.** (x2 + c **.** x + d) при любом х (-;+).

Т.к. (x2 + a **.** x + b) **.** (x2 + c **.** x + d) = x4 + (a + c) **.** x3 + (b + d + a . c) . x2 +

+ (a **.** d + b **.** c) **.** x + b **.** d, то



+ c = 0,

b + d + a **.** c = 1,

a **.** d + b **.** c = 0,

b **.** d = 1.

Исследуем полученную систему уравнений:

c = – a

b + d = a2 +1

a **.** d = a **.** b

b **.** d = 1

Если допустить, что а = 0, то получим:

c = 0 c = 0

b + d = 0 + 1 d = 1 – b

b **.** d = 1 b2 – b + 1 = 0

Но квадратное уравнение b2 – b + 1 = 0 не имеет действительных решений.

Значит, а 0 и c = – a b = d

b + d = a2 +1 b2 = 1

b = d a2 = 2b – 1

b **.** d = 1 c = – a



Поскольку 0 < a2 = 2b – 1, то b > ½ > 0.

Значит, b = 1 a = 1

d = 1 c = –1

a2 = 1 b = d = 1

c = – a a = –1

c = 1

b = d = 1

Соответствующие квадратные трёхчлены (х2 + х + 1) и (х2 – х + 1)

не имеют действительных нулей.



**Ответ**: х4 + х2 + 1 = (х2 + х + 1)**.**(х2 – х + 1).

**Задание №6.** Докажите, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство:

a + b  1

a4 + b2 b4 + a2 ab

**Решение**.  a + b  1 , (a, b – любые положительные

a4 + b2 b4 + a2 ab числа).

Преобразуем данное неравенство:



a2 **.** b + a**.**b2  1,

a4 + b2 b4 + a2

2a2 **.** b + 2a**.**b2  2. (\*)

(a2)2+b2 a2+(b2)2

Т.к. 2u**.**v  1 при любых положительных u и v, то

u2+v2



2a2 **.** b  1

(a2)2+b2

2a**.**b2  1 при любых положительных a и b.

a2+(b2)2

Следовательно, неравенство (\*) выполняется при любых a > 0, b > 0.

А тогда и данное неравенство верно при любых a > 0, b > 0.

**Ответ**: доказано.

**Задание №7.** В трапеции *MPKD* диагонали *MK* и *PD* взаимно перпендикулярны, средняя линия равна 15. На большом основании *MD* взята точка *A* так, что *MA* = 15. Найдите *KA*.

**Решение**.



P K

B C

T E

M A D

По условию 1) MPKD – трапеция со взаимно перпендикулярными диагоналями MK и PD, и средней линией (обозначим её через TE), равной 15; 2) MA=15, где А [MD].

Так как средняя линия трапеции параллельна её основанию, то MTEA – параллелограмм.

Обозначим через B и C – точки пересечения диагоналей данной трапеции со средней линией TE. Поскольку TE || РК, то ТВ|| РК ТВ – средняя линия в треугольнике МРК МВ = ВК. Обозначим: РК = а.

Тогда:

ВС = ТЕ – 2 **.** а/2 = 15 – а; а т.к. 15 = ТЕ = (а + MD)/2 , то MD = 30 – а



и, значит, AD = MD – 15 = 15 – a.

Получим: ВС = AD ABCD – параллелограмм.

BC || AD

В таком случае: AB || PD AB MB.

PD MK

Следовательно, АВ – высота треугольника МКА.

Но МВ = ВК и поэтому АВ – медиана этого же треугольника.



 МКА – равнобедренный: АК = АМ = 15.

**Ответ**: КА = 15.

**Задание №8.** Найдите А и В, если известно соотношение:

5х– 1 = А + В .

х2– х – 2 х + 1 х – 2

**Решение**. По условию,

5х– 1 = А + В , (х - 1;

х2– х – 2 х + 1 х – 2 х 2)

Т.к. А + В = А**.**(х-2)+В**.**(х+1) = (А+В)**.**х + (В-2А) ,

х + 1 х – 2 (х+1) **.** (х-2) (х+1) **.** (х-2)

то неизвестные числа А и В являются решениями системы уравнений:

А + В = 5

В – 2**.**А = -1.

Решим её: В = 5 – А В = 5 – 2 = 3,

(5 – А) – 2**.**А = -1. А = 2.



**Ответ**: А = 2, В = 3.



**Задание №9.** Найдите все пары натуральных чисел а и b, таких, что a  b и выполнено равенство:

1/а + 1/b = 1/10

**Решение**  По условию a,b

a  b

1/а + 1/b = 1/10

Ясно, что а 10 (иначе 1/b = 0, что невозможно).

Тогда 1/а + 1/b = 1/10 ⇔ b = 10 **.** a /(a – 10), (a 10).

Учтём, что b a (⇔ b – a 0) :

b – a = 10 **.** a /(a – 10) – a = a **.** (20 – a)/(a – 10) 0, если

- + - 10 < a  20

0 10 20 a

Перечислим все возможные случаи:



I

II

III

IV

V

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | 10a | a-10 | B=10a/(a-10) |
| 11 | 110 | 1 | 110 |
| 12 | 120 | 2 | 60 |
| 13 | 130 | 3 | не целое |
| 14 | 140 | 4 | 35 |
| 15 | 150 | 5 | 30 |
| 16 | 160 | 6 | не целое |
| 17 | 170 | 7 | не целое |
| 18 | 180 | 8 | не целое |
| 19 | 190 | 9 | не целое |
| 20 | 200 | 10 | 20 |

Итак, искомые (a,b) {(11;110); (12;60); (14;35); (15;30); (20;20)} и других таких a и b – нет.

**Задание №10**. Найдите десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого каждая цифра встречается по одному разу.



**Решение**. Пусть a0, a1, a2, …, a9 – цифры искомого числа А, т.е.

А = а9а8а7а6а5а4а3а2а1а0 .

По условию задачи все цифры числа А – различные.

Из того, что А кратно 11, следует:

а9 + а7 + а5 + а3 + а1 =а0 + а2 + а4 + а6 + а8.

Обозначим общее значение сумм через В. Ясно, что В – целое число.

С другой стороны, В = (0+1+2+…+9)/2 = 45/2 - не целое число.

Получили противоречие. Следовательно, числа с описанным в условии задачи свойством – не существует.



**Ответ**: такого числа не существует.

**Литература:**

1. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. - М.: МЦНМО, 2005
2. Григорьева Г.И. Задания для подготовки к олимпиадам.10-11 классы. Волгоград: "Учитель", 2005.
3. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы.- 8-е изд., испр. и доп.- М.: Айрис - пресс, 2009.

**Интернет ресурсы.**

# <http://lib.convdocs.org/docs/index-72903.html> - Методические рекомендации по подготовке школьников к олимпиадам.

# <http://www.den-za-dnem.ru/school.php?item=301> - Ресурсы для подготовки к олимпиадам.

# <http://mathus.ru/math/> - Материалы по математике: подготовка к олимпиадам и ЕГЭ.

# [http://www.zaba.ru](http://www.zaba.ru/) - **Математические олимпиады и олимпиадные задачи.**

# <http://mihailovoschool.> - Математические термины в ребусах.

# <http://festival.1september.ru/articles/621582/> - Подготовка учащихся к олимпиадам по математике.